Научная статья
УДК 517.956+517.958:539.3
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-52-73

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦОВОГО ТИПА

Комил Олимджанович Махмудов[1]
Олимджан Ишанкулович Махмудов[2]
Икбол Эргашевич Ниёзов[3]

[1,2,3]Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова
Самарканд, Узбекистан,

[1]komil.84@mail.ru:https://orcid.org/0009-0002-8119-3037
[2]makhmudovo@rambler.ru;https://orcid.org/0000-0002-7187-4712
[3]iqboln@mail.ru;https://orcid.org/0000-0001-8853-3941

Аннотация

Предлагается явная формула восстановления 2-метагармонической функции в области по ее известным значениям, значениям её нормальной производной, значениям лапласиана и значениям нормальной производной её лапласиана на части границы, т. е. даётся явная формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши для данного уравнения.

Ключевые слова и фразы

Задача Коши, метагармоническое уравнение, метагармоническая функция, уравнения эллиптического типа, некорректная задача, функция Карлемана.

Для цитирования

Махмудов К. О., Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Задача Коши для бигармонического уравнения гельмгольцового типа // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 52-73. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-52-73

The Cauchy problem for a biharmonic equation of helmholtz type

Komil O. Makhmudov[1], **Olimdjan I. Makhmudov**[2], **Ikbol E. Niyozov**[3]

[1,2,3]Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
Samarkand, Uzbekistan

[1]komil.84@mail.ru:https://orcid.org/0009-0002-8119-3037
[2]makhmudovo@rambler.ru;https://orcid.org/0000-0002-7187-4712
[3]iqboln@mail.ru;https://orcid.org/0000-0001-8853-3941

Abstract

An explicit reconstruction formula is proposed for a 2-metaharmonic function in a domain from its known values, the values of its normal derivative, the values of its Laplacian, and the values of the normal derivative of its Laplacian on a part of the boundary. That is, an explicit continuation formula is obtained, as well as a regularization of the solution to the Cauchy problem for the given equation.

Keywords

Cauchy problem, metaharmonic equation, metaharmonic function, elliptic equations, ill-posed problem, Carleman function.

For citation

Makhmudov K. O., Makhmudov O. I., Niyozov I. E., The Cauchy problem for a biharmonic equation of helmholtz type // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-52-73

§ 1. Введение и предварительные сведения

Рассматривается задача аналитического продолжения решения бигармонического уравнения гельмгольцового типа в области как в двух, так и в трех измерениях, по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши. В настоящее время хорошо изучены корректные задачи, поставленные для уравнений эллиптического типа и, в частности, для уравнения Гельмгольца. Однако во многих реальных задачах часть границы недоступна для измерений ни перемещений, ни напряжений, либо известны лишь некоторые интегральные характеристики. При экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния натурных конструкций, измерения могут быть произведены лишь на доступных участках поверхности. Понятие корректности постановки задачи математической физики было сформулировано в начале XX века известным французским математиком Ж. Адамаром. Задача математической физики называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия: 1) решение задачи существует; 2) решение задачи единственно; 3) решение задачи непрерывно зависит от данных задачи. Сформулировав понятие корректности, Ж. Адамар привел пример [1], некорректной задачи Коши для уравнения Лапласа. Необходимость рассмотрения некорректных в классическом смысле (по Адамару) задач математической физики в связи с проблемами интерпретации данных геофизических наблюдений была впервые указана в 1943 г. А.Н. Тихоновым [2],[3]. Он показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из единственности решения следует его устойчивость. Пути развития теории и методов решения некорректных задач связаны с именами видных математиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, а также с созданными ими научными математическими школами, во многом определившими пути развития теории и приложений некорректных задач. М.М. Лаврентьев [4]-[7] ввел понятие функции Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана. Метод Лаврентьева состоит в аппроксимации ядра Коши на дополнительной части границы области вне носителя данных задачи Коши. Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа – это фундаментальное решение, зависящее от положительного числового параметра, стремящегося к нулю вместе со своей производной по нормали на части границы области вне носителя данных Коши, когда параметр стремится к нулю. При помощи функции Карлемана и интегральной формулы Грина получается формула Карлемана, которая дает точное решение задачи Коши, когда данные заданы точно. Построение функции Карлемана позволяет также строить регуляризацию, когда данные Коши заданы приближенно. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы С.Н.Мергеляна (1956) [8]. Согласно этой теореме для любой пары непрерывных функций, заданных на гладком гомеоморфе круга в трехмерном пространстве, существует гармонический полином, такой, что сам полином аппроксимирует первую функцию, а ее производная по нормали аппроксимирует вторую. Если в качестве пары непрерывных функций взять фундаментальное решение уравнения Лапласа и его производную по нормали, то из указанной теоремы С.Н.Мергеляна следует существование функции Карлемана для произвольной односвязной области. Функция Карлемана для уравнения Лапласа явно построена Ш.Я.Ярмухамедовым [9], когда часть границы области является поверхностью конуса, и А.А.Шлапуновым [22], когда часть границы есть поверхность сферы. Построение Ш.Я. Ярмухамедова функции Карлемана основано на применении методов теории функций. При этом фундаментальное решение аппроксимируется на конической части границы области. Построение А.А. Шлапунова функции Карлемана основано на аппроксимации фундаментального решения уравнения Лапласа на сферической части границы области однородными гармоническими полиномами. Аналоги формулы Карлемана и критерий разрешимости задачи Коши для аналитических функций многих переменных получе-

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 52-73
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73

ны в работах А.А.Гончара [10], Л.А.Айзенберга [11]-[13], А.М.Кытманова [14], для гармонических функций, для уравнения Гельмгольца и для систем теории упругости в работах Ш.Я.Ярмухамедова [15]-[17], для произвольных эллиптических уравнений и систем Н.Н.Тарханова [18]-[20] и А.А.Шлапунова [21]-[23]. В.Г. Романовим решена известная проблема о построении весовой функции в методе Карлемана, широко используемом в теории дифференциальных уравнений, и, в частности, в теории некорректно поставленных и обратных задач, для получения априорных оценок решения задачи Коши с данными на времениподобной поверхности [24],[26] . Совместно с М.В. Клибановым [26]-[28] решена обратная задача квантовой теории рассеяния о конструктивном восстановлении потенциала в уравнении Шредингера по заданному модулю рассеянного поля, измеренному при высоких уровнях энергии. Суть результата: построение потенциала сведено к хорошо известной задаче томографии о восстановлении функции через ее интегралы по всевозможным прямым. Это дает возможность эффективно и устойчиво отыскивать потенциал. Изучена также обратная задача рассеяния, связанная с восстановлением коэффициента преломления в обобщенном уравнении Гельмгольца по заданному модулю рассеянного поля. Она сведена к решению известной обратной кинематической задачи. Это приводит к теоремам единственности и оценкам устойчивости решения, а также открывает путь ее конструктивного решения. Решение задачи Коши для одномерной системы уравнений Коши-Римана впервые получил Т. Карлеман в 1926 г [29]. Им была предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, позволяющей путем предельного перехода погасить влияние интегралов по части границы, где значения продолжаемой функции не заданы. А. Л. Бухгейм и М. В. Клибанов [30] предложили единый новый метод исследования широкого класса обратных задач. Основным преимуществом метода является то, что он позволяет доказывать теоремы единственности в «целом». Он основан на сведении обратной задачи к интегро-дифференциальному неравенству и применении далее весовых априорных оценок карлемановского типа. Оценки условной устойчивости можно получить известными приемами. Метод не зависит ни от типа, ни от порядка уравнения, а предполагает лишь наличие карлемановской оценки [31]. Задача Коши для систем теории упругости рассмотрены в работах [33]-[35]. В данной работе на основе метода функции Карлемана строится регуляризованное решение задачи Коши для бигармонического уравнения гельмгольцового типа для областей специального вида. Возможно, здесь уместно упомянуть, что роль функций Карлемана взадаче Коши аналогична роли функции Грина в задаче Дирихле. Однакофункции Карлемана задачи Коши, в отличие от функции Грина, определяются неоднозначно.

§ 2. Постановка задачи

Пусть $D-$ ограниченная односвязная область в $E^d(d=2,3)$, вещественного евклидово пространство.

Задача Коши. Пусть $y=(y_1,\ldots,y_d)\in D, D-$ есть ограниченная односвязная область в $E^d(d=2,3)$, с границей ∂D состоящий из части Σ гиперплоскости $y_d=0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_d>0$, т.е. $D-$ область типа "шапочки". В случае плоскости $\Sigma-$ часть плоскости $y_2=0$ и S гладкий кривой, лежащий в верхней полуплоскости.

Рассмотрим задачу: требуется найти регулярную функцию, т.е., $u(x)\in C^4(D)\cap C^3(\overline{D})$, удовлетворяющую условию

$$\Delta^2 u(x)-\lambda^4 u(x)=0,\quad x\in D, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(y)=f_0(y), & y\in S,\\ \dfrac{\partial u(y)}{\partial n}=\varphi_0(y), & y\in S,\\ \Delta u(y)=f_1(y), & y\in S,\\ \dfrac{\partial}{\partial n}\Delta u(y)=\varphi_1(y), & y\in S, \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda>0$, а $f_0,f_1,\varphi_0,\varphi_1$ — заданные функции на S.

Пример иллюстрирует некорректность поставленной задачи:

Пусть $\lambda=1$ и уравнение (1) задано в полуплоскости $(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\in\mathbb{R},\quad y>0$. Рассмотрим задачу Коши: найти функцию, удовлетворяющую условиям

$$u(x,0)=\frac{\cos(\sigma x)}{\sigma^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0,$$

$$\Delta u(x,0)=\frac{\cos(\sigma x)}{\sigma^3},\quad \frac{\partial}{\partial y}\Delta u(x,0)=0,$$

где σ — некоторая постоянная.

Нетрудно видеть, что решением этой задачи является функция

$$u(x,y)=\frac{1}{\sigma^3}\cos(\sigma x)\,\cosh\bigl(\sqrt{1+\sigma^2}\,y\bigr).$$

При достаточно большом σ начальные условия для решения $u(x,y)$ являются малыми, тогда как само решение при $x\neq 0$, $y>0$ может принимать сколь угодно большие значения. Таким образом, решение задачи является неустойчивым по отношению к малым изменениям входных данных.

Поскольку задача некорректно поставлена, это делает стандартные исчисления интегральных операторов Фурье неприменимыми. Если носитель данных Коши является вещественным, аналитическим, то теорема

Коши-Ковалевской применяется для гарантии существования локального решения. Мы используем специальную структуру для вывода явных условий глобальной разрешимости и приближенного решения. В этом случае формула Карлемана дает формулу для приближенного решения задачи Коши.

Используя результаты работ [6], [9] по задаче Коши для уравнения Лапласа, нами построена функция Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши для областей типа «шапочки». Данный результат является полезным для практики, поскольку функции Карлемана построены в явном виде с использованием элементарных и специальных функций.

§ 3. Построение функции Карлемана для областей типа шапочки

Предварительные сведения. Хорошо известно, что фундаментальное решение уравнения (1) в E^d задается выражением

$$E_\lambda(|x|) = \begin{cases} \dfrac{i}{8\lambda^2}\left(H_0^{(1)}(\lambda|x|) - H_0^{(1)}(i\lambda|x|)\right), & d=2,\\ \dfrac{1}{8\pi\lambda^2|x|}\left(e^{i\lambda|x|} - e^{-\lambda|x|}\right), & d=3, \end{cases}$$

где $H_\nu^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода порядка ν.

Для регулярного решения уравнения (1) имеет место формула [35]

$$u(x) = \int_{\partial D}\left[\frac{\partial E_\lambda(|x-y|)}{\partial n_y}\,\Delta u(y) - E_\lambda(|x-y|)\,\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n_y}\right] ds_y, \quad x\in D. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию

$$C_d F_\sigma(y,x,\lambda) = \frac{1}{K(x_d)}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left(\frac{K(w)}{w-x_d}\right)\frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du,$$

где $K(w) = \exp\left[\sigma w + (w-x_d)^2\right], \qquad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_d;$

$$C_d = \begin{cases} 2\pi, & d=2,\\ -2\pi^2, & d=3, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} |x_1-y_1|, & d=2,\\ \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}, & d=3, \end{cases}$$

$$\psi(\lambda u)=\begin{cases} uJ_0(\lambda u), & d=2,\\ \cos(\lambda u), & d=3.\end{cases}$$

В работе [16] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Функция $F_\sigma(y,x,\lambda)$ представима в виде*

$$C_dF_\sigma(y,x,\lambda)=\varphi_d(\lambda r)+g_d(x,y,\lambda),\quad d=2,3,$$

где φ_d — классическое фундаментальное решение уравнения $\Delta u-\lambda^2u=0$, по переменной x и по переменной y, а $g_d(x,y,\lambda)$ — регулярное решение уравнения $\Delta u-\lambda^2u=0$ по переменной y.

Построение функции Карлемана

Определение. Назовём *функцией Карлемана* для области D и части границы S)всякую функцию $\Phi_\sigma(y,x)$, зависящую от двух переменных y,x и положительного параметра σ, удовлетворяющую следующим условиям:

1)

$$\Phi_\sigma(y,x)=E_\lambda(|x-y|)+G(y,x,\sigma),$$

где функция $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет по переменной y уравнению (1) всюду в области D;

2)

$$\int_{\partial D\setminus S}\left(|\Phi_\sigma|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\right|+|\Delta_y\Phi_\sigma|+\left|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}\right|\right)ds_y\le\varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$.

Построим функцию Карлемана для областей типа «шапочки».

Пусть $x=(x_1,\dots,x_d)$, $y=(y_1,\dots,y_d)\in D$, $d=2,3$.

В случае, когда D — ограниченная односвязная область в E^2 с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой кривой S, лежащей в полуплоскости $y_2>0$, и отрезка $\partial D\setminus S$, принадлежащего оси $y_2=0$, построим функцию Карлемана следующим образом:

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left\{\frac{\exp\left[\sigma(w-x_2)+(w-x_2)^2\right]}{w-x_2}\right\}\frac{J_0(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,u\,du,\quad (4)$$

где $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2$, $\alpha=|x_1-y_1|$, $\sigma>0$ — параметр, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Если D — ограниченная односвязная область в E^3, с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3>0$ и плоскости $\partial D\setminus S: y_3=0$

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\frac{1}{-2\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left\{\frac{\exp\left[\sigma(w-x_3)+(w-x_3)^2\right]}{w-x_3}\right\}\frac{\cos(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du, \tag{5}$$

где $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, $\alpha^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $\sigma>0$ — параметр.

Верна следующая

Лемма 2. *Функция $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$, определяемая формулами (4) и (5), является функцией Карлемана области D и части границы S в каждом отдельном случае.*

Доказательство. Запишем равенства (4) и (5) в единой форме:

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\frac{1}{C_d\,K(x_d)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{K(W)}{W-x_d}\right)\frac{\psi(\lambda u)-\psi(i\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du,$$

где

$$K(W)=\exp\left[\sigma W+(W-x_d)^2\right],\qquad W=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_d,$$

$$C_d=\begin{cases}2\pi, & d=2,\\ -2\pi^2, & d=3,\end{cases}\qquad \alpha=\begin{cases}|x_1-y_1|, & d=2,\\ \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}, & d=3,\end{cases}$$

$$\psi(\lambda u)=\begin{cases}uJ_0(\lambda u), & d=2,\\ \cos(\lambda u), & d=3.\end{cases}$$

Теперь, на основе леммы 1, получим следующее. Представим функцию $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ в виде

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\Phi_{1\sigma}(y,x,\lambda)+\Phi_{2\sigma}(y,x,\lambda).$$

где

$$\Phi_{1\sigma}(y,x,\lambda)=\frac{1}{C_dK(x_d)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{K(W)}{W-x_d}\right)\frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du$$

$$=\begin{cases}\dfrac{i}{8\lambda^2}H_0^{(1)}\big(i\lambda|x-y|\big)+g_{21}(y,x,\sigma), & d=2,\\[2mm] \dfrac{e^{i\lambda|x-y|}}{8\pi\lambda^2|x-y|}+g_{31}(y,x,\sigma), & d=3,\end{cases}$$

$$\Phi_{2\sigma}(y,x,\lambda)=-\frac{1}{C_dK(x_d)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{K(W)}{W-x_d}\right)\frac{\psi(i\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{i}{8\lambda^2} H_0^{(1)}\big(\lambda|x-y|\big) + g_{22}(y,x,\sigma), & d=2, \\ \dfrac{e^{-\lambda|x-y|}}{8\pi\lambda^2|x-y|} + g_{32}(y,x,\sigma), & d=3, \end{cases}
$$

здесь функции $g_{dj}(y,x,\sigma)$, $d=2,3$, $j=1,2$, регулярные функции, определенные для всех значений x,y и удовлетворяющая уравнению (1) по y в E^d, то получим первую условию «карлемановости» функции $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$.

Покажем, что функция $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ удовлетворяет также второму условию карлемановости, то есть

$$
\int_{\partial D\setminus S} \left(|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right| + |\Delta_y \Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma}{\partial n}\right| \right) ds_y \le C(x)\,\sigma^4 e^{-\sigma x_d}, \quad x\in D, \tag{6}
$$

где

$$
C(x) = C\int_{\partial D\setminus S} \frac{ds_y}{r^{d+1}}, \qquad r=|x-y|,
$$

$\sigma>0$ — параметр, d — размерность пространства.

Действительно, при $d=2$, выделяя мнимую часть, имеем

$$
\Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[\sigma(y_2-x_2) - \alpha^2 + (y_2-x_2)^2\right]
$$

$$
\times \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}} \Big[(y_2-x_2)\,\sin\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}\,(\sigma-2(y_2-x_2))\big) -
$$

$$
-\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\cos\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}\,(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big]
$$

$$
\times\big(J_0(\lambda u) - J_0(i\lambda u)\big)\,u\,du.
$$

Учитывая свойства функции Бесселя имеем

$$
|\Phi_\sigma(y,x,\lambda)| \le \frac{C}{2\pi}\exp\left[\sigma(y_2-x_2) - \alpha^2 + (y_2-x_2)^2\right]
$$

$$
\times\Bigg[\int_0^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}} \Big|(y_2-x_2)\,\sin\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du
$$

$$
+\int_0^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}} \Big|\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\cos\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du\Bigg]
$$

$$
\le \frac{C}{2\pi}\exp\left[\sigma(y_2-x_2) - \alpha^2 + (y_2-x_2)^2\right]
$$

$$\times\Bigg[\int_0^1 \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\Big|(y_2-x_2)\,\sin\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du$$

$$+\int_1^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\Big|(y_2-x_2)\,\sin\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du$$

$$+\int_0^1 \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\Big|\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\cos\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du$$

$$+\int_1^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\Big|\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\cos\big(\sqrt{u^2+\alpha^2}(\sigma-2(y_2-x_2))\big)\Big|\,du\Bigg]$$

$$\le \frac{C\sigma}{2\pi}\exp\big[\sigma(y_2-x_2)-\alpha^2+(y_2-x_2)^2\big]\Bigg[c_1\sigma\int_0^1 \frac{e^{-u^2+\lambda u}}{\sqrt{u^2+r^2}}\,du$$

$$+c_2\int_1^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}}{(u^2+r^2)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du+\int_0^1 \frac{e^{-u^2+\lambda u}\,u}{u^2+r^2}\,du+\int_1^\infty \frac{e^{-u^2+\lambda u}}{u^2+r^2}\,du\Bigg],$$

где $C, c_j, (j=1,2)$– ограниченные положительные постоянные.

Оценив каждый интеграл, получим

$$|\Phi_\sigma(y,x,\lambda)|\le \frac{C_1\sigma\ln r}{2\pi}\exp\big[\sigma(y_2-x_2)-\alpha^2+(y_2-x_2)^2\big].$$

Аналогично, вычисляя производные $\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_k}$, $\frac{\partial^2\Phi_\sigma}{\partial y_k\partial y_j}$ и $\frac{\partial^3\Phi_\sigma}{\partial y_k\partial y_j\partial y_l}$, где $k,j,l=1,2$, получим следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x,\lambda)\right|\le \frac{C_2\sigma^2}{2\pi r}\exp\big[\sigma(y_2-x_2)-\alpha^2+(y_2-x_2)^2\big],$$

$$|\Delta_y\Phi_\sigma(y,x,\lambda)|\le \frac{C_3\sigma^3}{2\pi r^2}\exp\big[\sigma(y_2-x_2)-\alpha^2+(y_2-x_2)^2\big],$$

$$\left|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x,\lambda)\right|\le \frac{C_4\sigma^4}{2\pi r^3}\exp\big[\sigma(y_2-x_2)-\alpha^2+(y_2-x_2)^2\big],$$

C_j $(j=1,2,3,4)$ — ограниченные постоянные.

При $d=3$, аналогично получим

$$|\Phi_\sigma(y,x,\lambda)|\le \frac{\widetilde{C}_1\sigma}{2\pi^2 r}\exp\big[\sigma(y_3-x_3)-\alpha^2+(y_3-x_3)^2\big],$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x,\lambda)\right|\le \frac{\widetilde{C}_2\sigma^2}{2\pi^2 r^2}\exp\big[\sigma(y_3-x_3)-\alpha^2+(y_3-x_3)^2\big],$$

$$|\Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)| \le \frac{C_3\sigma^3}{2\pi^2 r^3}\exp\left[\sigma(y_3-x_3)-\alpha^2+(y_3-x_3)^2\right],$$

$$\left|\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma}{\partial n}(y,x,\lambda)\right| \le \frac{\widetilde{C}_4\sigma^4}{2\pi^2 r^4}\exp\left[\sigma(y_3-x_3)-\alpha^2+(y_3-x_3)^2\right].$$

где $\widetilde{C}_j$ $(j=1,2,3,4)$ — ограниченные постоянные. Тогда, объединяя неравенства, полученные при $d=2$ и $d=3$, получим неравенство (6). Лемма доказана. □

Из определения функции Карлемана $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ вытекает, что если она существует, то всякое регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в области D определяется формулой

$$u(x)=\int_{\partial D}\left[u(y)\,\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}-\Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\,\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right.$$

$$\left.+\Delta u(y)\,\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}-\Phi_\sigma(y,x,\lambda)\,\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}\right]ds_y. \tag{7}$$

Действительно, по формуле Грина имеем

$$\int_{\partial D}\left[u(y)\,\frac{\partial \Delta_y G(y,x,\sigma)}{\partial n}-\Delta_y G(y,x,\sigma)\,\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right.$$

$$\left.+\Delta u(y)\,\frac{\partial G(y,x,\sigma)}{\partial n}-G(y,x,\sigma)\,\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}\right]ds_y=0.$$

Теперь, учитывая формулу (3) и складывая эти равенства, получим (7).

§ 4. Регуляризация решения задачи

Положим

$$u_\sigma(x)=\int_{S}\left[f_0(y)\,\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}-\Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\,\varphi_0(y)\right.$$

$$\left.+f_1(y)\,\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}-\Phi_\sigma(y,x,\lambda)\,\varphi_1(y)\right]ds_y. \tag{8}$$

Верна теорема

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (2) в области D, удовлетворяющее условию*

$$|u(y)| + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right| + |\Delta u(y)| + \left|\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}\right| \le M, \quad y \in \partial D \setminus S. \tag{9}$$

Тогда при $\sigma \ge 1$ и для $x \in K \subset D$, где K — произвольный компакт в D, справедлива равномерная оценка

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \le C_2(x)\, M\, \sigma^4 e^{-\sigma x_d},$$

где $C_2(x) = C\int_{\partial D} \frac{ds_y}{r^{d+1}}$, $r = |x-y|$, C — некоторая положительная постоянная, d — размерность пространства.

Доказательство. Так как формулы представления для $u(x)$ и $u_\sigma(x)$ совпадают, то доказательство в случаях $d=2$ и $d=3$ проводится одинаково. По формулам (4), (8) и условию (9) имеем

$$|u(x) - u_\sigma(x)| = \left| \int_{\partial D\setminus S} \left[u(y)\, \frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta u(y)\, \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n} \right] ds_y \right|$$

$$\le \int_{\partial D\setminus S} \left(|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right| + |\Delta_y \Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma}{\partial n}\right| \right)$$

$$\times \left(|u(y)| + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right| + |\Delta u(y)| + \left|\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}\right| \right) ds_y$$

$$\le M \int_{\partial D\setminus S} \left(|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right| + |\Delta_y \Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma}{\partial n}\right| \right) ds_y.$$

Используя оценку (6), получаем требуемое неравенство. Теорема доказана. □

Приведём результат, позволяющий приближённо вычислить $u(x)$, когда на поверхности S вместо $u(y)$, $\dfrac{\partial u(y)}{\partial n}$, $\Delta u(y)$ и $\dfrac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}$ заданы их непрерывные приближения $f_{0\delta}(y)$, $\varphi_{0\delta}(y)$, $f_{1\delta}(y)$ и $\varphi_{1\delta}(y)$:

$$\max_{y\in S} |f_0(y) - f_{0\delta}(y)| + \max_{y\in S} |\varphi_0(y) - \varphi_{0\delta}(y)|$$

$$+ \max_{y\in S} |f_1(y) - f_{1\delta}(y)| + \max_{y\in S} |\varphi_1(y) - \varphi_{1\delta}(y)| \le \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{10}$$

Определим следующую функцию

$$u_{\sigma\delta}(x) = \int_S \Bigg[f_{0\delta}(y)\, \frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \varphi_{0\delta}(y)$$

$$+ f_{1\delta}(y)\, \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \varphi_{1\delta}(y) \Bigg] ds_y, \qquad (11)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{x_d^0} \ln \frac{M}{\delta}, \qquad x_d^0 = \max_{x \in \overline{D}} x_d, \qquad x_d > 0,$$

d — размерность пространства.

Тогда верна

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (2) в области D, удовлетворяющее условию (9) на $\partial D \setminus S$. Тогда при $\sigma \geq 1$ и для любого компакта K ($K \subset D$) справедлива равномерная оценка*

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C_3(x)\, \delta^{\frac{x_d}{x_d^0}} \left(\ln \tfrac{M}{\delta}\right)^4, \quad x \in K,$$

где

$$C_3(x) = C \int_{\partial D} \frac{ds_y}{r^{d+1}}, \qquad r = |x-y|,$$

C — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Как и в теореме 1, доказательство проводится одинаково для случаев $d=2$ и $d=3$. Из соотношений (7), (11) и условий (9), (10) получаем следующую цепочку неравенств:

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq \Bigg| \int_S \Big[(f_0(y) - f_{0\delta}(y)) \frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}$$

$$- \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, (\varphi_0(y) - \varphi_{0\delta}(y))$$

$$+ (f_1(y) - f_{1\delta}(y))\, \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}$$

$$- \Phi_\sigma(y,x,\lambda)(\varphi_1(y) - \varphi_{1\delta}(y)) \Big] ds_y \Bigg|$$

$$+ \Bigg| \int_{\partial D \setminus S} \Big[u(y)\, \frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \frac{\partial u(y)}{\partial n}$$

$$+\Delta u(y)\,\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n}-\Phi_\sigma(y,x,\lambda)\,\frac{\partial\Delta u(y)}{\partial n}\Big]\,ds_y\Bigg|$$

$$\leq\int_S\Big(|\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|+|\Delta_y\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|\Big)$$

$$\times\Big(|f_0(y)-f_{0\delta}(y)|+|\varphi_0(y)-\varphi_{0\delta}(y)|+|f_1(y)-f_{1\delta}(y)|+|\varphi_1(y)-\varphi_{1\delta}(y)|\Big)\,ds_y$$

$$+\int_{\partial D\setminus S}\Big(|\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|+|\Delta_y\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|\Big)$$

$$\times\Big(|u(y)|+\Big|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\Big|+|\Delta u(y)|+\Big|\frac{\partial\Delta u(y)}{\partial n}\Big|\Big)\,ds_y$$

$$\leq\delta\int_S\Big(|\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|+|\Delta_y\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|\Big)\,ds_y$$

$$+M\int_{\partial D\setminus S}\Big(|\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|+|\Delta_y\Phi_\sigma|+\Big|\frac{\partial\Delta_y\Phi_\sigma}{\partial n}\Big|\Big)\,ds_y$$

$$\leq C_2(x)\,\delta\,\sigma^4\exp\big[\sigma(x_d^0-x_d)\big]+C_1(x)\,M\,\sigma^4e^{-\sigma x_d}$$

$$\leq C_3(x)\,\sigma^4\Big(M+\delta e^{\sigma x_d^0}\Big)e^{-\sigma x_d}.$$

Полагая

$$\sigma=\frac{1}{x_d^0}\ln\frac{M}{\delta},$$

из последнего неравенства получаем

$$|u(x)-u_{\sigma\delta}(x)|\leq C_3(x)\,\delta^{\frac{x_d}{x_d^0}}\big(\ln\tfrac{M}{\delta}\big)^4.$$

Теорема доказана. □

Приведём оценку условной устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* $u(x)$ *— регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$|u(y)|+\Big|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\Big|+|\Delta u(y)|+\Big|\frac{\partial\Delta u(y)}{\partial n}\Big|\leq M,\quad y\in\partial D\setminus S,$$

и

$$|u(y)|+\Big|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\Big|+|\Delta u(y)|+\Big|\frac{\partial\Delta u(y)}{\partial n}\Big|\leq\delta,\quad 0<\delta<1,\quad y\in S.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|U(x)|\leq C_4(x)\,\delta^{\frac{x_d}{x_d^0}}\big(\ln\tfrac{M}{\delta}\big)^4,$$

где

$$C_4(x) = C \int_{\partial D} \frac{ds_y}{r^{d+1}}, \qquad r = |x-y|,$$

C — постоянная.

Доказательство. Действительно, из теоремы 1 следует

$$|u(x)| \le |u_\sigma(x)| + C_2(x)\, M\, \sigma^4 e^{-\sigma x_d}.$$

Из условий теоремы и неравенства (6) получаем оценку

$$|u_\sigma(x)| = \left| \int_S \Big[f_0(y)\, \frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Delta_y \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \varphi_0(y) \right.$$

$$\left. + f_1(y)\, \frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial n} - \Phi_\sigma(y,x,\lambda)\, \varphi_1(y) \Big]\, ds_y \right|$$

$$\le \int_S \Big(|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right| + |\Delta_y \Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Delta_y \Phi_\sigma}{\partial n}\right| \Big)$$

$$\times \Big(|u(y)| + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right| + |\Delta u(y)| + \left|\frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n}\right| \Big)\, ds_y$$

$$\le C_3(x)\, \delta\, \sigma^4 \exp\big(\sigma x_d^0 - \sigma x_d\big).$$

Тогда

$$|u(x)| \le C_4(x)\, \sigma^4 e^{-\sigma x_d} \Big(M + \delta e^{\sigma x_d^0} \Big).$$

Полагая

$$\sigma = \frac{1}{x_d^0} \ln \frac{M}{\delta},$$

получаем оценку условной устойчивости

$$|u(x)| \le C_4(x)\, \delta^{\frac{x_d}{x_d^0}} \left(\ln \tfrac{M}{\delta} \right)^4.$$

Теорема доказана. □

Имеет место

Следствие 1. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma\to\infty} u_\sigma(x) = u(x), \qquad \lim_{\delta\to 0} u_{\sigma\delta}(x) = u(x), \quad \text{при } \sigma = \frac{1}{x_3^0} \ln \frac{1}{\delta},$$

выполняются равномерно на каждом компакте $K \subset D$.

Доказательство следствия непосредственно следует из теорем 1 и 2.

§ 5. Заключение

В работе построено семейство функций

$$u(x, f_{k\delta}, \varphi_{k\delta}) = u_{\sigma\delta}(x),$$

зависящее от параметра σ, и доказано, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ данное семейство $u_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $u(x)$ задачи (1), (2).

Полученная оценка условной устойчивости явно выражает связь между граничными условиями в классе корректности задачи.

Список литературы

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // *Успехи мат. наук.* 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.

2. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методы регуляризации // *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.

3. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980.

4. *Лаврентьев М. М.* О задачах Коши для уравнения Лапласа // *Докл. АН СССР.* 1955. Т. 102. № 2. С. 389–390.

5. *Лаврентьев М. М.* О задачах Коши для уравнения Лапласа // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1956. Т. 20. С. 819–842.

6. *Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.

7. *Лаврентьев М. М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.* Новосибирск: НГУ, 1973.

8. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // *Успехи мат. наук.* 1956. Т. 11. № 5(71). С. 337–340.

9. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Докл. АН СССР.* 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.

10. *Gonchar A. A.* On analytic continuation from the "edge of wedge" // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 1985. V. 10. P. 221–225.

11. *Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.* Абстрактная формула Карлемана // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.

12. *Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе.* Новосибирск: Наука, 1990.

13. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // *Мат. сборник.* 1991. Т. 182. № 4. С. 490–507.

14. *Кытманов А. М. Интеграл Мартинелли–Бохнера и его применения.* Новосибирск: Наука, 1991.

15. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Мат. заметки.* 1975. Т. 18. № 1. С. 57–61.

16. *Ярмухамедов Ш. Я.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца // *Докл. РАН.* 1997. Т. 357. № 3. С. 320–323.

17. *Ярмухамедов Ш. Я.* Теория Коши в математических задачах теории упругости // *Докл. РАН.* 1997. Т. 357. № 5. С. 628–630.

18. *Тарханов Н. Н.* О матрице Карлемана для эллиптических систем // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.

19. *Tarkhanov N. N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations.* Math. Topics, 7, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

20. *Тарханов Н. Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем.* Новосибирск: Наука, 1991.

21. *Шлапунов А. А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Сиб. матем. журн.* 1992. Т. 33. № 3. С. 205–215.

22. *Шлапунов А. А., Тарханов Н. Н.* К задаче Коши для голоморфных функций класса L^2 в области // *Сиб. матем. журн.* 1992. Т. 33. № 5. С. 186–195.

23. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // *Proc. London Math. Soc.* 1995. V. 71. № 3. P. 1–52.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 52-73
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73

24. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering two coefficients in an elliptic equation via phaseless information // *Inverse Problems and Imaging* 2019. V. 13. № 1. P. 81–91.

25. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения задачи для уравнений электродинамики с данными на времениподобной поверхности // *Докл. РАН.* 2006. Т. 411. № 1. С. 16–19.

26. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information // *Inverse Problems.* 2017. V. 33. 095007.

27. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // *Inverse Problems.* 2016. V. 32. № 2. 015005.

28. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* The first solution of a long-standing problem: Reconstruction formula for a 3-D phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2015. V. 23. № 4. P. 415–428.

29. *Carleman T. Les fonctions quasi analytiques.* Paris: Gauthier–Villars, 1926.

30. *Бухгейм А. Л., Клибанов М. В.* Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 260. № 2. С. 269–272.

31. *Клибанов М. В.* Обратные задачи в целом и карлемановские оценки // *Дифференц. уравнения.* 1984. Т. 20. № 6. С. 1035–1041.

32. *Махмудов О. И., Ниёзов И. Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36. № 5. С. 674–678.

33. *Махмудов О. И., Ниёзов И. Э.* О задаче Коши для системы динамических уравнений теории упругости // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 9. С. 1164–1173.

34. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity // *Contemp. Math.* 2008. V. 455. P. 297–310.

35. *Махмудов О. И., Ниёзов И. Э.* The Cauchy Problem for Equation of Elasticity Theory // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2023. V. 16. № 2. P. 162–175.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 52-73
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73

References

1. *Agranovich M. S., Vishik M. I.* Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type // *Russian Math. Surveys* 1964. Vol. 19. No. 3. P. 53–161.

2. *Tikhonov A. N.* On the solution of incorrectly posed problems and regularization methods // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1963. Vol. 151. No. 3. P. 501–504.

3. *Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* Moscow: Nauka, 1980.

4. *Lavrentiev M. M.* On the Cauchy problem for the Laplace equation // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1955. Vol. 102. No. 2. P. 389–390.

5. *Lavrentiev M. M.* On the Cauchy problem for the Laplace equation // *Izv. Acad. Sci. USSR Ser. Math.* 1956. Vol. 20. P. 819–842.

6. *Lavrentiev M. M. Some Ill-posed Problems of Mathematical Physics.* Novosibirsk: Computing Center SB AS USSR, 1962.

7. *Lavrentiev M. M. Conditionally Well-posed Problems for Differential Equations.* Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 1973.

8. *Mergelyan S. N.* Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation // *Russian Math. Surveys* 1956. Vol. 11. No. 5. P. 337–340.

9. *Yarmukhamedov Sh. Ya.* On the Cauchy problem for the Laplace equation // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1977. Vol. 235. No. 2. P. 281–283.

10. *Gonchar A. A.* On analytic continuation from the "edge of wedge" // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 1985. Vol. 10. P. 221–225.

11. *Aizenberg L. A., Tarkhanov N. N.* Abstract Carleman formula // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1988. Vol. 298. No. 6. P. 1292–1296.

12. *Aizenberg L. A. Carleman Formulas in Complex Analysis.* Novosibirsk: Nauka, 1990.

13. *Aizenberg L. A., Kytmanov A. M.* On the possibility of holomorphic continuation into a domain of functions given on a connected part of its boundary // *Math. USSR-Sb.* 1991. Vol. 182. No. 4. P. 490–507.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 52-73
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73

14. *Kytmanov A. M. The Martinelli–Bochner Integral and Its Applications.* Novosibirsk: Nauka, 1991.

15. *Yarmukhamedov Sh. Ya.* On the Cauchy problem for the Laplace equation // *Math. Notes* 1975. Vol. 18. No. 1. P. 57–61.

16. *Yarmukhamedov Sh. Ya.* On continuation of solutions of the Helmholtz equation // *Dokl. Russian Acad. Sci.* 1997. Vol. 357. No. 3. P. 320–323.

17. *Yarmukhamedov Sh. Ya.* Cauchy theory in problems of elasticity // *Dokl. Russian Acad. Sci.* 1997. Vol. 357. No. 5. P. 628–630.

18. *Tarkhanov N. N.* On the Carleman matrix for elliptic systems // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1985. Vol. 284. No. 2. P. 294–297.

19. *Tarkhanov N. N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations.* Math. Topics, 7, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

20. *Tarkhanov N. N. Laurent Series for Solutions of Elliptic Systems.* Novosibirsk: Nauka, 1991.

21. *Shlapunov A. A.* On the Cauchy problem for the Laplace equation // *Siberian Math. J.* 1992. Vol. 33. No. 3. P. 205–215.

22. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* On the Cauchy problem for holomorphic functions of class L^2 // *Siberian Math. J.* 1992. Vol. 33. No. 5. P. 186–195.

23. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.* Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols // *Proc. London Math. Soc.* 1995. Vol. 71. No. 3. P. 1–52.

24. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering two coefficients in an elliptic equation via phaseless information // *Inverse Problems and Imaging* 2019. Vol. 13. No. 1. P. 81–91.

25. *Romanov V. G.* Stability estimate for electrodynamics equations with data on a timelike surface // *Dokl. Russian Acad. Sci.* 2006. Vol. 411. No. 1. P. 16–19.

26. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information // *Inverse Problems* 2017. Vol. 33. 095007.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 52-73
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 52-73

27. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem // *Inverse Problems* 2016. Vol. 32. No. 2. 015005.

28. *Klibanov M. V., Romanov V. G.* Reconstruction formula for a 3-D phaseless inverse scattering problem for the Schrödinger equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2015. Vol. 23. No. 4. P. 415–428.

29. *Carleman T. Les fonctions quasi analytiques.* Paris: Gauthier–Villars, 1926.

30. *Bukhgeim A. L., Klibanov M. V.* Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems // *Dokl. Acad. Sci. USSR* 1981. Vol. 260. No. 2. P. 269–272.

31. *Klibanov M. V.* Inverse problems in the large and Carleman estimates // *Differ. Equations* 1984. Vol. 20. No. 6. P. 1035–1041.

32. *Makhmudov O. I., Niyozov I. E.* On a Cauchy problem for elasticity systems // *Differ. Equations* 2000. Vol. 36. No. 5. P. 674–678.

33. *Makhmudov O. I., Niyozov I. E.* Cauchy problem for dynamical elasticity systems // *Differ. Equations* 2020. Vol. 56. No. 9. P. 1164–1173.

34. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity // *Contemp. Math.* 2008. Vol. 455. P. 297–310.

35. *Makhmudov O. I., Niyozov I. E.* The Cauchy problem for elasticity equations // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2023. Vol. 16. No. 2. P. 162–175.

Информация об авторах

Комил Олимджанович Махмудов, доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам

Олимджан Ишанкулович Махмудов, кандидат физико-математических наук, доцент

Икбол Эргашевич Ниёзов, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 8444-5396 AuthorID 666961
Scopus Author ID 15751682700

Author Information

Komil O. Makhmudov, Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences

Olimdjan I. Makhmudov, Candidate of Mathematics, Associate Professor

Ikbol E. Niyozov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 8444-5396 AuthorID 666961
Scopus Author ID 15751682700

Статья поступила в редакцию 03.04.2025;
одобрена после рецензирования 28.04.2026; принята к публикации 06.05.2026

The article was submitted 03.04.2025;
approved after reviewing 28.04.2026; accepted for publication 06.05.2026